

## Lato z geofizyk (4)

### Mierzymy anomalie grawitacyjne

Kiedy interesujemy się naukami o Ziemi, nie polećmy sobie na Ziemi nie jest jednakowe na Ziemi. Odchylenia od standardowej wartości nazywamy **anomaliami grawitacyjnymi**. Mierzmy je, wykrywa się zwłaszcza w niektórych minerałach. Niestety zwykłe wahadło wykorzystane do pomiarów przyspieszenia opisane w „Lato z geofizyk (2)” jest o wiele za mało dokładnym przyrządem, aby wykryć niewielkie różnice pola ciężkości (rzędu 1/100000 wartości). Jeżeli jednak mamy w domu dobry **zegar wahadłowy**, to możemy wykorzystać go do naszych badań geofizycznych.

Zanim wynaleziono kwarcowy chronometr (a później zegar kwarcowy), to zegary wahadłowe były najdokładniejszym sposobem pomiaru czasu. Zegarmistrzowie potrafili już w 18 wieku skonstruować zegary ośmiogajce o dokładności rzędu kilku sekund na miesiąc. Zegary te, niestety nie nadawały się do pomiarów czasu na statku, przez co nie pomogły w nawigacji przy wyznaczaniu długości geograficznej.

Zauważmy, że zegar mierzy nie czas, ale liczbę wahań wahadła i podaje ją za pomocą wskazówek. Podobnie we współczesnych zegarkach kwarcowych elektronika mierzy po prostu liczbę drgań kryształu kwarcu.

Do wiadzenia zaczynamy tygodnie przed wakacyjnym wyjazdem. Najpierw obserwujemy chód zegara i porównujemy z dobrym elektronicznym zegarem. Nie tyle chodzi o dokładność pokazywania czasu, ale o jednostajność chodu zegara. Czy w zależności od temperatury i ciśnienia powietrza zegar zmienia swój szybkość chodu? Oczywiście przy okazji warto zegar podregulować. A więc ustawiamy go pionowo według poziomu i regulujemy długość wahadła (powinno być do tego mała rubka na wahadle).

Później regularnie raz na dobę sprawdzamy moment przejścia dużej wskazówki przez umówiony punkt. Warto przylepić plastelin do tarczy strzałki, pozwalając na precyzyjne określenie momentu przejścia. Po kilkunastu dniach obserwacji możemy obliczyć szybkość chodu zegara.

Zauważmy, że 1 doba to 24 godz = 1440 minut = 86400 sekundy. Jeżeli więc zegar w ciągu 12 dni pokaże czas z dokładnością do 1 sekundy, to będziemy mieli przyrząd o dokładności ponad 1:1000000!

Sprawdzonego zegar przed wyjazdem starannie pakujemy. Szczególnie dbamy o wahadło, które nie powinno ulec jakiegokolwiek deformacji. Od niego zależy wartość zegara jako czasomierza!

Po przywiezieniu na miejsce wakacyjnego pobytu wieszamy zegar, ustawimy w pionie, wieszamy wahadło, nakręcimy zegar i rozpoczynamy ponownie obserwacje jego chodu.

**Wynikiem pomiaru jest czas odmierzony tym samym zegarem w dwóch różnych miejscach, który zależy od pola ciężkości.**

### Teoria do wiadzenia

Zaczynamy od wzoru na okres wahadła znanego z fizyki szkolnej:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

gdzie  $T$  to okres pełnego wahnięcia [s],  $l$  długość wahadła [m] i  $g$  przyspieszenie grawitacyjne [ $\text{m s}^{-2}$ ]. Podnosząc obie strony równania (1) do kwadratu, mamy:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \quad (2)$$

Czyli:

$$\frac{g}{4\pi^2} = \frac{l}{T^2} \quad (3)$$

Skoro  $T$  to czas jednego pełnego wahnięcia, to  $1/T$  to liczba pełnych wahań w jednostce czasu. Oznaczmy to wielkość przez  $w=1/T$ . Czyli:

$$\frac{g}{4\pi^2} = l w^2 \quad (4)$$

Napišemy teraz to równanie dla obu miejsc pomiarowych: 1 (dla pomiarów w domu) i 2 (pomiar na wakacjach):

$$\frac{g_1}{4\pi^2} = l w_1^2 \quad (5)$$

$$\frac{g_2}{4\pi^2} = l w_2^2 \quad (6)$$

Niech różnice będą oznaczane przez:  $dg=g_2 - g_1$ , zaś  $w_2 - w_1 = dw$ . W takim razie podstawiamy  $g_2 = g_1 + dg$  i  $w_2 = w_1 + dw$  do równania (6) mamy:

$$\frac{g_1 + dg}{4\pi^2} = l(w_1 + dw)^2 = l(w_1^2 + 2w_1 dw + dw^2) \quad (7)$$

Odejmując teraz stronami (5) od (7), otrzymujemy:

$$\frac{dg}{4\pi^2} = l(2w_1 dw + dw^2) \approx 2lw_1 dw \quad (8)$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że różnica  $dw$  jest mała w stosunku do  $w_1$ , czyli wartość  $dw^2$  jest zanedbywalnie mała w stosunku do  $2w_1 dw$ . Zauważmy jeszcze, że z (5) mamy:

$$l w_1 = \frac{g_1}{4\pi^2 w_1} \quad (9)$$

Wstawiając (9) do (8) otrzymujemy ostatecznie prosty wzór wyrażający względną zmianę siły ciężkości  $dg/g_1$  po lewej stronie od względnej zmiany prędkości wahań  $dw/w_1$  po prawej stronie:

$$\frac{dg}{g_1} \approx 2 \frac{dw}{w_1} \quad (10)$$

Względne zmiany są wygodne w naszym przypadku, bowiem wystarczy obliczyć względne zmiany prędkości zegara (np. prędkość obrotów dużych wskazówek), aby otrzymać względną zmianę pola ciężkości.

### Przeprowadzenie pomiaru

Zanimyśmy więc, że w domu obserwowaliśmy chód zegara przez tydzień. Duża wskazówka zegara wahadłowego podczas pomiaru wykonała  $24 \times 7 = 168$  obrotów w czasie 604790 sekund mierzonych elektronicznie. Po przeniesieniu zegara na wakacyjny pobyt mierzyliśmy czas

przez 6 dni, czyli  $24 \times 6 = 144$  obrotów i otrzymali my 518510 sekundy. Czyli w domu pr dko obrotu du ej wskazówki być:

$w_1 = 168/604790 \text{ obr/s} = 0,000277782 \text{ obr/s}$ , czyli 1 obrót wskazówka wykonywać w czasie 3599,94 sekund (zamiast w ci gu 3600 sekund).

Na wakacjach:

$w_2 = 144/518510 \text{ obr/s} = 0,000277719 \text{ obr/s}$ , czyli 1 obrót wskazówka wykonywać w czasie 3600,76 sekund (zamiast w ci gu 3600 sekund).

Ró nica pr dko ci wynosi:  $0,000277782 - 0,000277719 = 0,000000063 = 63 \times 10^{-8} \text{ obr/s}$ .

Wzgl dna ró nica pr dko ci  $dw/w_1 = -63 \times 10^{-8} / 2,77782 \times 10^{-4} = -0,00022868$ .

Wzgl dna ró nica sić ci ko ci  $dg/g_1 = 2 dw/w_1 = -0,00045735$ .

### Analiza wyników

Dokądno naszych pomiarów nie jest tak dobra, aby potrzeba być nam pi cyfr znaczych w wyniku. Zaokr glijmy wi c wyniki do 3 cyfr, czyli:

Wzgl dna ró nica pr dko ci  $dw/w_1 = -0,000229$ .

Wzgl dna ró nica sić ci ko ci  $dg/g_1 = -0,000457$ .

Aby otrzyma warto bezwzgl dn ró nicy sić ci ko ci pomnó my  $dg/g_1$  przez  $9,81 \text{ m/s}^2$  (typow warto pola) i otrzymamy  $-0,000457 \times 9,81 \text{ m/s}^2 = -0,00449 \text{ m/s}^2$ .

Poniewa wygodnie jest pracowa na wi kszych liczbach, skorzystajmy z jednostki przyspieszenia u ywanej tradycyjnie w grawimetrii. Jest to  $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2 = 0,01 \text{ m/s}^2$ . W takim razie ró nica przyspieszenia grawitacyjnego wynosi:  $-0,449 \text{ gala}$ . Czy jest ona spowodowana? Jest kilka przyczyn.

Zauwa my najpierw, e sić ci enia odczuwana na Ziemi to efekt sić przyci gania grawitacyjnego przez Ziemi oraz (w mniejszym stopniu) efekt sić od rodkowej.

Przyspieszenie grawitacyjne  $\mathbf{g}_{\text{graw}}$  [m s<sup>-2</sup>] pola pochodz tego od ciać kulistego jest wektorem o wielko ci danym wzorem:

$$g_{\text{graw}} = GM/R^2,$$

gdzie  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$  to stać powszechnej grawitacji,  $M$  [kg] to masa Ziemi ( $5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$ ), a  $R$  [m] to odlegć od rodka Ziemi. Przyspieszenie  $\mathbf{g}_{\text{graw}}$  jest wektorem skierowanym do rodka Ziemi. Maleje on z odlegć ci od rodka Ziemi jak odwrotno kwadratu odlegć ci.

Przyspieszenie sić od rodkowej  $\mathbf{g}_{\text{od rod}}$  jest wektorem o warto ci danej wzorem:

$$g_{\text{od rod}} = \omega^2 d,$$

gdzie  $\omega$  to pr dko obrotu Ziemi wokóć osi ( $7,29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ), a  $d$  [m] to odlegć od osi obrotu. Wektor  $\mathbf{g}_{\text{od rod}}$  jest skierowany od osi obrotu. Cać owite przyspieszenie sić ci enia  $\mathbf{g}_{\text{ci}}$  to suma wektorowa:

$$\mathbf{g}_{\text{ci}} = \mathbf{g}_{\text{graw}} + \mathbf{g}_{\text{od rod}}.$$

Wektor ten jest skierowany zawsze prostopadle do powierzchni geoidy w danym miejscu.

Powody zmiany przyspieszenia grawitacyjnego na Ziemi (patrz Rys. 2).

1. Spłaszczenie Ziemi: Ziemia jest spłaszczona, przez co na biegunach jest bliżej do środka Ziemi, stąd siła przyciągania jest tam większa, a na równiku jest dalej od środka Ziemi, czyli siła przyciągania jest mniejsza.
2. Siła odśrodkowa: jest większa na równiku i skierowana jest przeciwnie do siły grawitacji, czyli dodatkowo zmniejsza siłę ciążenia na równiku.
3. Im jesteśmy wyżej w górach tym oddalamy się od środka Ziemi, czyli siła grawitacji maleje a siła odśrodkowa rośnie.
4. Wnętrze Ziemi nie jest jednorodne. Nad skałami o większej gęstości siła przyciągania jest trochę większa.

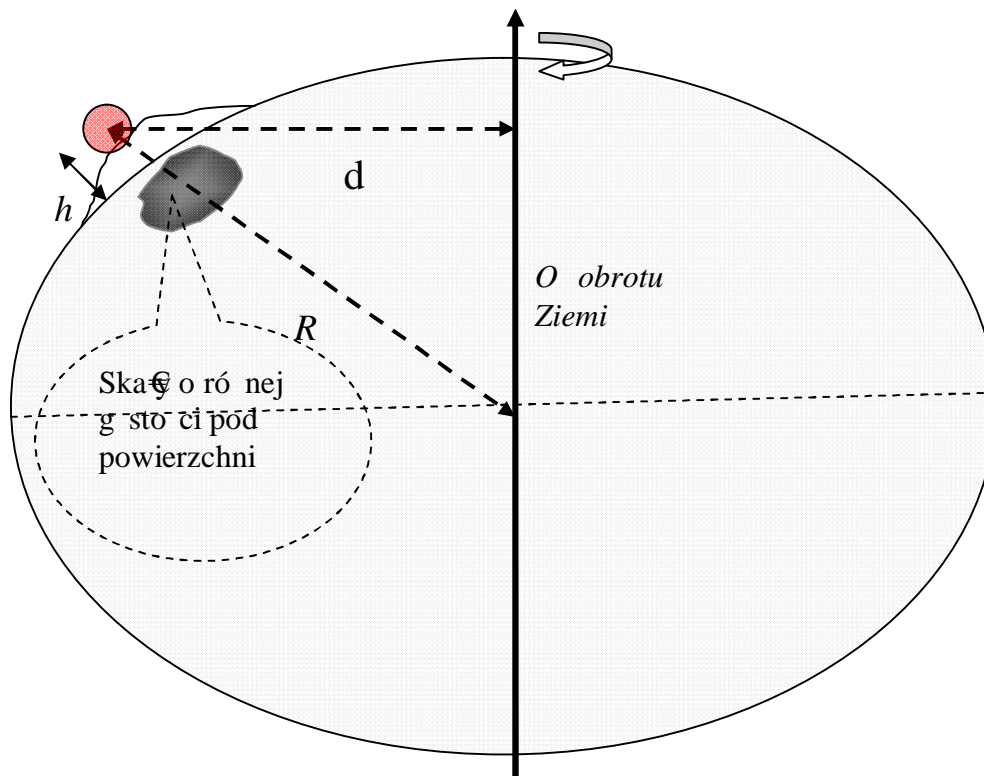
Zmiany wynikające z pierwszych trzech przyczyn są dosyć proste do przewidzenia i uwzględnienia. W zależności od szerokości geograficznej wartość normalna przyspieszenia siły ciążenia  $g_{\text{norm}}$  wyraża się wzorem:

$$g_{\text{norm}} = 9,780327 (1 + 0,0053024 \sin^2(\varphi) - 5,8 \times 10^{-6} \sin^2(2\varphi)) \text{ [m/s}^2\text{]}. \quad (11)$$

W celu obliczenia przyspieszenia na danej wysokości, od obliczonej wartości ze wzoru (11) odejmujemy wielkość  $3,086 \text{ [s}^{-2}\text{]} \times 10^{-6} h$  gdzie  $h$  to wysokość nad poziomem morza mierzona w metrach.

**Jedynie zmiany wynikające z 4 punktu nazywamy anomaliami grawitacyjnymi.**

Do uwzględnienia pierwszych trzech przyczyn załączamy krótki plik do arkusza obliczeniowego [tutaj](#). Otwieramy ten plik w Excelu lub innym arkuszu obliczeniowym. W komórki zaznaczone różnym kolorem wpisujemy wyniki pomiarów oraz położenie domu i miejsca wakacyjnego. Plik oblicza wartości w pozostałych polach. Między innymi podaje anomalie grawitacyjne (w komórkach c31 i c32), czyli różnicę pomiędzy przyspieszeniem siły ciążenia na wakacjach i w domu niewykazującą zmianę położenia.



**Rys. 1.** Czynniki zmieniające lokalnie siłę ciężkości Ziemi działające na ciało (tutaj: czerwona kula):  $R$  odległość od środka Ziemi (bo siła grawitacji zależy od odległości),  $d$  odległość od osi obrotu (bo siła odśrodkowa rośnie z odległością), wysokość nad poziomem morza  $h$ , gęstość skały pod powierzchnią Ziemi.

Wstawiamy więc szeroko geograficzny domu i jego wysokość nad poziomem morza, oraz te same dane dla miejsca wakacyjnego pobytu. Excel obliczy poprawki do pomiarów zgodnie z podanymi wyżej wzorami i obliczy anomalie. W przytoczonym poniżej przykładzie anomalia wynosi: 46 mgal.

Pole zmierzone na wakacjach jest silniejsze o 46 mgal. niż by to wynikało z położenia (szerokości geograficznej i wysokości n.p.m.). Problemem jest tylko, że nie wiemy z jakim miejscem ta anomalia jest związana! Może być to wynik tego, że rzeczywiście pole grawitacyjne w miejscu wakacji jest silniejsze niż wzorcowe (dane wzorem (11)). Może to być jednak wynikiem tego, że w domu pole grawitacyjne jest anomalnie słabsze! Niestety nasz pomiar był typowym względnym pomiarem. Dlatego do ostatecznego rozstrzygnięcia powinniśmy znaleźć mapy anomalii grawitacyjnych. Jeśli w domu anomalia wynosiła np. +10 mgal, (czyli pole w domu było silniejsze niż wzorcowe), to pole w miejscu wakacji jest silniejsze aż o 56 mgal niż wzorcowe! Jeśli jednak anomalia w domu wynosiła -10 mgal (pole słabsze niż wzorcowe), to anomalia pola w miejscu wakacji byłaby tylko 36 mgal.

### Czego wynikiem może być dana anomalia?

Anomalia dodatnia oznacza obecność ciężkich minerałów (o większej gęstości niż zwykła skała, np. żelaza). Anomalia ujemna oznacza obecność lekkich minerałów (o mniejszej gęstości niż zwykła skała, np. soli kamiennej).

**Zadanie:** Zakładając, że anomalie dodatnie spowodowane są złożami rudy żelaza, a ujemne złożami soli kamiennej oblicz rozmiary i głębokości tych złożeń dla otrzymanej przez Ciebie anomalii grawitacyjnej. Założenie: złożenia mają kulisty kształt.

### Przykładowe wyniki Excela:

szerokość geograficzna [deg]	54,5
wysokość n.p.m. [m]	22
Przyspieszenie normalne w domu [m/s <sup>2</sup> ]	9,814647743
Poprawka za wysokość [m/s <sup>2</sup> ]	0,00006776
Obliczone g1 w domu [m/s <sup>2</sup> ]	9,814579983
<b>Wakacje</b>	
szerokość geograficzna [deg]	50
wysokość n.p.m. [m]	350
Przyspieszenie normalne na wakacjach [m/s <sup>2</sup> ]	9,810704216
Poprawka za wysokość [m/s <sup>2</sup> ]	0,001078
Obliczone g2 na wakacjach [m/s <sup>2</sup> ]	9,809626216
<b>Wyniki pomiaru</b>	
$dw = w_2 - w_1$ [obr/s]	-6,35225E-08
$dw/w_1$ [bezwymiarowe]	-0,000228677
$dg/g_1$ [bezwymiarowe]	-0,000457354
różnica zmierzona $dg$ [m/s <sup>2</sup> ] = $(dg/g_1) * g_1$ obliczone	-0,004488742
$g_2 = g_1 + dg$	<b>9,810091241</b>
<b>anomalia = <math>g_2</math> zmierzone - <math>g_2</math> obliczone [m/s<sup>2</sup>]</b>	0,000465025
<b>anomalia w mgal [0,001 cm/s<sup>2</sup>]</b>	<b>46,50249681</b>