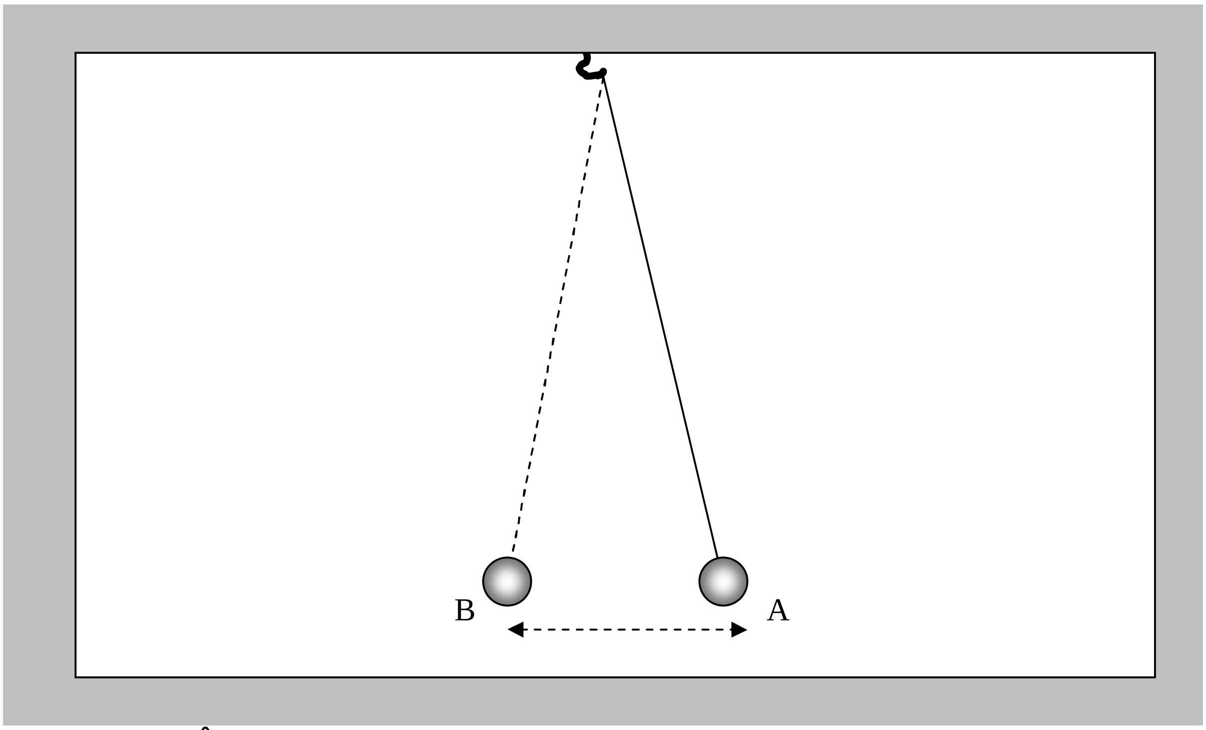
Wakacje z geofizyką (2)

Mierzymy przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi

Do pomiaru potrzebne jest wahadło i stoper. Obecnie stoper jest w każdym prawie telefonie komórkowym. Trochę większy problem jest z wahadłem. Musimy mieć kulisty ciężarek i cienką wiotką lecz nierozciągliwą nić. Najlepsza byłaby ciężka metalowa kulka o średnicy kilku centymetrów. W ostateczności możemy przygotować ciężarek z modeliny lub plasteliny. Ważna jest jego kulistość. Długość wahadła powinna wynosić ponad metr. Najlepiej powiesić je na haku w suficie tak, aby wisiało niewysoko nad podłogą – Rys. 1. Próbujemy, czy przy po wychyleniu o kilka stopni będzie wahało się wystarczająco długo (ok. 100 razy).



Rys. 1. Idea doświadczenia. Pełne wahanie jest od maksymalnego wychylenia w punkcie A do powrotu wahadła do punktu A. Nie wychylamy początkowo wahadła silnie, bo wzór (1) dla dużych wychyleń jest niedokładny.

Teoria

Wyjdziemy od wzoru na okres wahadła dla niedużych wychyleń znanego z fizyki szkolnej:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \qquad (1)$$

gdzie T to okres pełnego wahnięcia [s], l długość wahadła [m] i g przyspieszenie grawitacyjne [m s^{-2}]. Podnosząc obie strony równania (1) do kwadratu, mamy:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}. \qquad (2)$$

Czyli przyspieszenie siły ciężenia wynosi:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \qquad (3)$$

Pomiar

Mierzymy dokładnie średnicę samego ciężarka (warto suwmiarką) i nici (po zawieszeniu).
Długość wahadła to:
l =długość nici + połowa średnicy ciężarka.
Teraz mierzymy stoperem ustaloną ilość pełnych wahnięć (czyli od maksymalnego wychylenia do powrotu na to samo miejsce).
N = ilość pełnych wahnięć wahadła,
t = czas N pełnych wahnięć, czyli okres to:
$T = t/N$.
Obliczamy g:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \qquad (4)$$

Oczywiście warto powtórzyć pomiary l i T kilkakrotnie i obliczyć średnie ich wartości. Możemy w ten sposób zwiększyć dokładność wyników.

Przykład:
l =2,5 m,
N = 100,
t = 317 s,
T=3,17 s.
Obliczamy g = 9,82 m/s^2.
.

Oszacowanie błędu pomiaru *g*

Do każdego pomiaru w fizyce powinniśmy zrobić oszacowanie dokładności tego pomiaru. Dokładność pomiaru g zależy od dokładności pomiarów l i T.
- Dla l powinniśmy osiągnąć dokładność Δl = 1-2 mm.
- N powinno udać się zmierzyć dla ok. 100 wahnięć bez pomyłki w liczeniu,
- t mierzymy z dokładnością do Δt = 1-2 sekundy, czyli dla okresu T możemy przyjąć, że błąd to $\Delta T = \Delta t/N$.

Przy niewielkiej ilości pomiarów (poniżej 6) możemy policzyć jedynie tzw. **błąd maksymalny**. Maksymalną wartość g zgodną z pomiarami otrzymamy, wstawiając minimalną możliwą wartość T (czyli $T - \Delta T$) i maksymalną możliwą wartość l (czyli $l + \Delta l$).
Otrzymujemy:

$$g_{\max} = 4\pi^2 \frac{l + \Delta l}{(T - \Delta T)^2}\,. \qquad (5)$$

MinimalnŃ wartoŚĺ g zgodnŃ z pomiarami otrzymujemy wstawiajŃc maksymalnŃ moŬiwŃ wartoŚĺ T i minimalnŃ moŬiwŃ wartoŚĺ l, czyli:

$$g_{\min} = 4\pi^2 \frac{l - \Delta l}{(T + \Delta T)^2}\,. \qquad (6)$$

Prawdziwa wartoŚĺ g zawiera siň pomiňdzy $g_{\min}$ i $g_{\max}$..
W naszym **przykăadzie:** ɑT =0,01 s i ɑl=0,001 m, po podstawieniu do powyŬszych wzorów otrzymujemy: g_{max}= 9,89 m/s^2, g_{min}=9,76 m/s^2. Jak widaĺ , wynik g = 9,82 m/s^2 jest bliski rzeczywistemu, mimo Ŭe moŬiwy băŃd jest dosyĺ duŬy.

Warto teŬ oszacowaĺ băňdy spowodowane uŬywaniem **uproszczonego wzoru** (1). Bardziej dokăadny wzór to:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^{\,2}\right),$$

gdzie ***ű***$_0$ to maksymalne wychylenie wahadăa mierzone w radianach (!). Jak widaĺ dla ű$_0$=5^o=0,087 rad, T bňdzie wiňksze o 4,75x10^{-4} niŬ wynika to ze wzoru (1).

Dla osób znajŃcych **rachunek róŬniczkowy** warto przypomnieĺ sposób uzyskiwania wzoru na băŃd maksymalny. Niech wielkoŚĺ fizyczna g wyraŬa siň przez l i T za pomocŃ wzoru g(l, T). BăŃd maksymalny otrzymujemy wtedy w sposób:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g(l,T)}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial g(l,T)}{\partial T}\right|\Delta T\,. \qquad (7)$$

Przy wiňkszej iloŜci pomiarów (powyŬej 6) moŬemy zrobiĺ **statystycznŃ analizň băňdu**, teŬ w sumie prostŃ, ale jej opis zostawimy do innej okazji.